Doble Jornada de Geometría

Libro de Resúmenes

Superficies helicoidales de curvatura media prescrita en $\mathbb{R}^3$

Aries Barbieri, Universidad de Granada

Dada $\mathcal{H} \in C^1(\mathbb{S}^2)$, una *superficie de curvatura media prescrita* $\mathcal{H}$ (o simplemente $\mathcal{H}$-*superficie*) en $\mathbb{R}^3$ es una superficie inmersa Σ cuya curvatura media satisface $H_\Sigma = \mathcal{H} \circ \eta$, donde η denota la aplicación de Gauss de Σ. El objetivo de esta charla es estudiar $\mathcal{H}$-superficies helicoidales cuando $\mathcal{H}$ es rotacionalmente simétrica, es decir, cuando $\mathcal{H} \circ \eta = \mathfrak{h} \circ \nu$ para cierta $\mathfrak{h} \in C^1([-1,1])$, donde $\nu = \langle \eta, e_3 \rangle$ es la función angular de Σ.

Adaptamos el análisis en el espacio de fases desarrollado por Bueno, Gálvez y Mira [**?**] para hipersuperficies rotacionales al caso helicoidal [**?**]. Los principales resultados establecen: (1) unicidad (salvo rotaciones) para superficies helicoidales $\mathcal{H}$ que intersecan el eje de rotación, y (2) un teorema de clasificación cuando $\mathfrak{h}$ es positiva, par y creciente en $[0,1]$.

Presentamos además ejemplos de superficies helicoidales $\mathcal{H}$ cuando $\mathfrak{h}$ se anula en algún punto, ilustrando cómo los ceros de $\mathcal{H}$ influyen en la geometría de la superficie. Estos ejemplos destacan los desafíos técnicos al extender nuestra clasificación a $\mathcal{H}$ generales, sugiriendo posibles direcciones para futuras investigaciones en esta área.

[1] Antonio Bueno, José A. Gálvez, and Pablo Mira. *Rotational hypersurfaces of prescribed mean curvature*, J. Differential Equations **268(5)**:2394–2413 (2020).

[2] Aires M. Barbieri. *Helicoidal surfaces of prescribed mean curvature in* $\mathbb{R}^3$, Results Math **79**, 258 (2024).

Subvariedades totalmente geodésicas de los espacios simétricos relacionados con G2

Cristina Drapper, Universidad de Málaga

El problema de la determinación de las subvariedades totalmente geodésicas de un espacio simétrico es equivalente al problema algebraico de determinar los subtriples del correspondiente sistema triple de Lie (que puede verse como la parte impar de una Z2-graduación). En el caso de los espacios simétricos (riemannianos) G2 y G2/SO(4) dichas subvariedades están determinadas. Nuestro trabajo [1] aporta, además de una demostración independiente de la clasificación de las subvariedades totalmente geodésicas maximales para estos espacios (que no es ni computacional, ni dependiente de raíces, como es el caso de las demostraciones previas) descripciones muy naturales de estas subvariedades en términos de subálgebras asociativas y de Grassmannianas. También proporcionamos descripciones matriciales de los triples para un uso práctico.

[1] Cristina Draper, Cándido Martín-González. A perspective on totally geodesic submanifolds of the symmetric space G2/SO(4). arXiv:2504.07586. Aceptado en Transactions of the AMS, 2025.

Algunas aplicaciones del modelo de Brown-Szczarba en homotopía racional

Antonio Garvín, Universidad de Málaga

Dados dos espacios X e Y denotamos por $map(X,Y)$ el espacio de aplicaciones de X en Y. En esta charla pretendemos recordar el modelo de Brown-Szaczarba asociado al espacio de aplicaciones y como usarlo para calcular su tipo de homotopía racional n el caso en que X sea un espacio de configuración euclideo e Y sea una esfera.

Half-space type Theorems for a class of weighted minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$

Antonio Luis Martínez Triviño, Universidad de Córdoba

In this talk, we show the Half-space property for a general family of φ-stochastically complete $[\varphi, \vec{e}_3]$-minimal surfaces in $\mathbb{R}^3$ applying a weak maximum principle for the Drift Laplacian under constraints on the principal curvatures and over the growth the function φ. In fact, when the region is determined by either two-transverse vertical half-spaces of $\mathbb{R}^3$ or half-spaces defined over inclined planes, we will prove that these results are sharp when φ has almost quadratic growth. Furthermore, taking into account the restriction on the principal curvatures together with the Ekeland's maximum principle, we have a version of the strong Half-space result of Hoffman-Meeks for these families of surfaces.

Finally, in this context, we will give two non-existence results. Precisely, we prove the non-existence outside of a right circular cones and the non-existence in wedges of $\mathbb{R}^3$.

Finite sets are mapping degree sets

Vicente Muñoz, Universidad Complutense de Madrid

Let M, N be two oriented closed connected manifolds of dimension n. We define the mapping degree set as $deg(M, N) = \{deg(f) | f : M \to N\}$. It is very relevant to construct inflexible manifolds M, i.e. $deg(M, M)$ is finite, and strongly inflexible manifolds M, i.e. for all N, $deg(N, M)$ is finite They serve to produce functorial seminorms on n-manifolds.

On the other hand, one may ask which sets of integers can appear as $deg(M, N)$ for some M, N. By cardinality reasons, not all sets can. Here we prove that any finite set of integers A, containing 0, is a mapping degree set for some M, N. We extend this question to the rational homotopy theory setting, where an affirmative answer is also given, by using Sullivan models. (joint work with C.Costoya and A.Viruel)

Del Programa Erlangen de Klein a las Geometrías de Cartan

Francisco Palomo, Universidad de Málaga

El descubrimiento de las geometrías no euclídeas durante el siglo XIX motivó una reflexión sobre qué debemos entender por geometría. Bernhard Riemann en 1854 en *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* propuso una extensión de la teoría de superficies de Gauss a dimensión arbitraria. Por otro lado, un acercamiento diferente vino de las ideas que Felix Klein presentó en 1872 en su programa de Erlangen. Allí Klein señalaba que cada geometría, digamos M, posee un grupo de movimientos G que actúa de forma transitiva en M y las propiedades geométricas son aquéllas que quedan invariantes por la acción de G. Estos dos puntos de vista parecieron irreconciliables, salvo por el hecho de que los espacios de curvatura seccional constante, simplemente conexos y completos podían describirse de ambos modos. A principio de los años 1920, Élie Cartan encontró que es posible una generalización común. Él los llamó *espaces généralizés* y hoy los conocemos como geometrías de Cartan. Realmente Cartan había mostrado el primer ejemplo en 1910, más de una década antes. En 1950, Charles Ehresmann dio la primera definición global rigurosa de geometría de Cartan como un caso particular de una noción más general, la ahora llamada conexión principal o de Ehresmann. En esta charla haremos un recorrido por estas ideas y presentaremos algunos ejemplos que muestran la diversidad de estructuras geométricas que admiten una descripción común desde este punto de vista. Además, veremos cómo las geometrías de Cartan permiten relacionar estructuras geométricas de naturaleza aparentemente diferente.

[1] A. Čap and J. Slovák, *Parabolic Geometries I*, Mathematical Surveys and Monographs 154, A.M.S., 2009.

[2] S. Kobayashi, Transformations groups in Differential Geometry, Classics in Mathemat- ics, Springer, 1995.

[3] F. J. Palomo, Lightlike manifolds and Cartan geometries Anal.Math.Phys. 11, no. 112, (2021).

[4] R.W. Sharpe, Differential Geometry, Graduate Texts in Mathematics 166, Springer, 1997.

Inmersiones isométricas nulas

Didier A. Solís, Universidad Autónoma de Yucatán

Los teoremas fundamentales en geometría semi-Riemanniana establecen que las ecuaciones de estructura de subvariedades (Gauss-Codazzi-Ricci) son esencialmente suficientes para garantizar la existencia de una inmersión isométrica. En el caso de subvariedades degeneradas, al análisis es más delicado debido a que no existe una descomposición canónica del haz tangente del ambiente en partes tangente y normal a la subvariedad degenerada. En esta charla abordaremos el problema de las inmersiones isométricas de hipersuperficies nulas en variedades de Lorentz. Es un tabajo en progreso con C. Avila, M. Navarro y O. Palmas.

Elliptic Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$ with convex planar boundary

Marcos Paulo Tossi, Universidad de Granada

A surface Σ immersed in $\mathbb{R}^3$ is an elliptic Weingarten surface if its principal curvatures k_1 and k_2 satisfy an equation of the type $W(k_1, k_2) = 0$, for some function $W : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ of class C^1 such that $\frac{\partial W}{\partial k_1}\frac{\partial W}{\partial k_2} > 0$ on $W^{-1}(\{0\})$. Known examples of elliptic Weingarten surfaces include minimal and constant mean curvature surfaces, and surfaces of positive constant gaussian curvature.

In 1996 A. Ros and H. Rosenberg proved that for a strictly convex curve $\Gamma \subset \{z = 0\} \subset \mathbb{R}^3$, there exists a constant h depending only on the curve Γ such that any compact surface embedded in $\mathbb{R}^3_+ := \{z \geq 0\}$ with constant mean curvature $H \leq h$ must be topologically a closed disk.

In this talk we will present a generalization of Ros-Rosenberg Theorem for elliptic Weingarten surfaces in $\mathbb{R}^3$, discussing its proof, which is based on some geometric analysis techniques as the Maximum Principle and the Alexandrov Reflection Method, and the recent classification of elliptic Weingarten surfaces of revolution obtained by I. Fernandez and P. Mira.

This is a joint work with B. Nelli and G. Pipoli.